Maths XP CS $n°5$ 11 Avril 2025 **Thiaude P. – Vermeulen G.**

Durée : 1h15 **Les calculatrices et montres connectées sont <u>interdites</u>**

Abraham de MOIVRE

(1667-1754)

Abraham de Moivre est un mathématicien Français, auteur de la formule qui porte son nom.

(image : source Wikipedia)

<u>Exercice 1</u> [3 points] Alignés ou non alignés : telle est la question

Dans le plan complexe, $z_E = -1 - i$, $z_F = 1 + 3i$, $z_G = 4 + 9i$: E, F et G sont-ils alignés ?

<u>Exercice 2</u> [5 points] Deux suites imbriquées (d'après BAC)

$u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}\, v_n \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = u_n + iv_n$.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (\sqrt{3} + i)z_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n : $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n.
4. Déterminer les entiers naturels n tels que : $u_n = 0$.
5. Si l'affirmation suivante est vraie, la démontrer, sinon en donner un contre-exemple :
   « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 + v_n^2 = 4^n$ ».

<u>Exercice 3</u> [3 points] Une transformation du plan complexe

On note f la transformation graphique du plan complexe qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i$$

On dit qu'un point M est invariant par f lorsque $M' = M$ autrement dit lorsque $f(M) = M$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul point invariant A par f et en donner l'affixe.
2. Reconnaître la nature de la transformation graphique f , en donner les caractéristiques.

<u>Exercice 4</u> [4 points] Un peu de trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4x)$ uniquement à l'aide de $\cos(x)$.

<u>Exercice 5</u> [3 points] Produit des racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, on note (E_n) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^n = 1$.

1. Résoudre (E_2), (E_3) et (E_4) puis calculer le produit des solutions de (E_2), le poduit des solutions de (E_3) et le produit des solutions de (E_4) : émettre une conjecture.
2. Déterminer le produit des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_n).

<u>Exercice 6</u> [2 points] Une propriété sur les éléments de $\mathbb{U}$

1. Démontrer que, pour tout complexe de module 1, on a : $\frac{1}{z} = \overline{z}$.
2. Soient a, b et c des complexes de module 1, démontrer que :

$$|ab + bc + ca| = |a + b + c|$$

Corrigé

Exercice 1

$z_E = -1 - i$, $z_F = 1 + 3i$ et $z_G = 4 + 9i$: les points E, F et G sont-ils alignés ?

On a :

$$\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{4 + 9i - (-1 - i)}{1 + 3i - (-1 - i)} = \frac{4 + 9i + 1 + i}{1 + 3i + 1 + i} = \frac{5 + 10i}{2 + 4i} = \frac{5(1 + 2i)}{2(1 + 2i)} = \frac{5}{2}$$

On constate que $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E}$ est un réel donc les points E, F et G sont alignés.

Autre méthode

Avec les notations de l'exercice on a les équivalences :

$$\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow z_G - z_E = \frac{5}{2}(z_F - z_E) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{EG}} = \frac{5}{2}\, z_{\overrightarrow{EF}} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{2}\,\overrightarrow{EF}$$

Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{EG} = k\,\overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, et comme trois points seulement interviennent, E, F et G, on en déduit que ces trois points sont alignés.

Exercice 2

$u_0 = 1, v_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \sqrt{3}\, v_n \end{cases}$ et $z_n = u_n + iv_n$

1. **Vérifier que, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = (\sqrt{3} + i)z_n$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)z_n &= (\sqrt{3} + i)(u_n + iv_n) = \sqrt{3}u_n + i\sqrt{3}v_n + iu_n - v_n \\ &= \sqrt{3}u_n - v_n + i(u_n + \sqrt{3}v_n) = u_{n+1} + iv_{n+1} = z_{n+1}\end{aligned}$$

   Conclusion :

   $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = (\sqrt{3} + i)z_n$

2. **Justifier que, pour tout entier naturel n : $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.**

   On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (\sqrt{3} + i)z_n$ et $\sqrt{3} + i$ est une constante, donc (z_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{3} + i$, par conséquent, pour tout entier naturel n : $z_n = z_0 \times q^n$ avec $z_0 = u_0 + iv_0 = 1 + i(0) = 1$ et $q = \sqrt{3} + i$, autrement dit : $z_n = (\sqrt{3} + i)^n$.

   On a : $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$z_n = 1 \times (\sqrt{3} + i)^n = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right]^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

   Conclusion :

   $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

3. **En déduire u_n et v_n en fonction de n.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

   On a d'une part :

   $$z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} = 2^n\left[\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right] = 2^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\,2^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

et d'autre part, on a : $z_n = u_n + iv_n$.Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont des parties réelles égales et des parties imaginaires égales, donc :

$$u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \text{ et } v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

Conclusion :

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \text{ et } v_n = 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$

4. **Déterminer les entiers naturels $\boldsymbol{n}$ tels que : $\boldsymbol{u_n = 0}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a les équivalences :

$$u_n = 0 \Leftrightarrow 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Or, on a les équivalences :

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow n = \frac{6}{2} + 6k \Leftrightarrow n = 3 + 6k$$

Conclusion :

$\boldsymbol{u_n = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = 3 + 6k}$

5. **Si l'affirmation suivante est vraie, la démontrer, sinon en donner un contre-exemple : « pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}, u_n^2 + v_n^2 = 4^n}$ ».**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n^2 + v_n^2 = |u_n + iv_n|^2 = \left(\left|2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}\right|\right)^2 = \left(|2^n| \times \left|e^{i\frac{n\pi}{6}}\right|\right)^n = (2^n \times 1)^2 = (2^n)^2$$
$$= 2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$$

On a donc : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n^2 + v_n^2 = 4^n}$ **par conséquent l'affirmation est vraie**.

Exercice 3

On note f la transformation graphique du plan complexe qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i$.

1. **On dit qu'un point $\boldsymbol{M}$ est invariant lorsque $\boldsymbol{M' = M}$.**
Montrer qu'il existe un et un seul point invariant et en donner l'affixe.

M est invariant pr f si et seulement si $M' = M$, autrement dit si et seulement si $z' = z$.
Or, on a les équivalences

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \sqrt{3} + i$$

$$\Leftrightarrow z\left[1 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3} + i}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(\sqrt{3} + i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow z = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}\Leftrightarrow z=2i$$

Conclusion :

Il existe un et un seul point invariant : A son affixe est $2i$.

2. **Nature de la transformation graphique f et caractéristiques**

   A est un point invariant par f donc ;

$$z_A=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A+\sqrt{3}+i$$

Notons r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et montrons que pour tout point M du plan complexe on a : $f(M)=r(M)$.

• **si $M\neq A$** :

$$\frac{z'-z_A}{z-z_A}=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\sqrt{3}+i-\left(\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A+\sqrt{3}+i\right)}{z-z_A}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\sqrt{3}+i-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A-\sqrt{3}-i}{z-z_A}=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A}{z-z_A}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-z_A)}{z-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Conclusion :

$$\frac{z'-z_A}{z-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

D'une part :

$$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)=\arg\left(\frac{z'-z_A}{z-z_A}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\ (*)$$

et d'autre part :

$$\frac{AM'}{AM}=\frac{|z'-z_A|}{|z-z_A|}=\left|\frac{z'-z_A}{z-z_A}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$$

donc $AM'=AM\ (**)$.

On déduit que $(*)$ et $(**)$ que $f(M)=r(M)$.

• **si $M=A$**

D'une part : A est un point invariant par f donc : $f(A)=A$,

d'autre part : A est le centre de la rotation r donc : $r(A)=A$.

On en déduit que : $f(A)=r(A)$.

Conclusion

Pour tout point M du plan complexe, on a : $f(M)=r(M)$, donc **f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$**.

Complément :
On peut montrer que, si $M \neq A$ alors AMM' est un triangle équilatéral :
on déduit des deux points précédents que AMM' est isocèle et $\widehat{MAM'} = 60°$.
En notant α la mesure commune en degré de $\widehat{AMM'}$ et $\widehat{M'AM}$, on a :
$$2\alpha + 60° = 180° \Leftrightarrow 2\alpha = 120° \Leftrightarrow \alpha = 60°$$
Les trois angles du triangle AMM' mesurent $60°$ donc c'est un triangle équilatéral.

Exercice 4
Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4x)$ uniquement à l'aide de $\cos(x)$.

Méthode $n°1$ **Utilisation de la formule de Moivre**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(4x) + i\sin(4x) = e^{i4x} = \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos(x) + i\sin(x))^4$$
$$= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)\, i\sin(x) + 6\cos^2(x)\, i^2\sin^2(x) + 4\cos(x)\, i^3\sin^3(x) + i^4\sin^4(x)$$
$$= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)\, i\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4\cos(x)\, i\sin^3(x) + \sin^4(x)$$
$$= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) + i(4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x))$$
Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont des parties réelles égales et des parties imaginaires égales, donc : $\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$.
Or, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ donc :
$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + (1 - \cos^2(x))^2$$
$$= \cos^4(x) - 6\cos^2(x) + 6\cos^4(x) + 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)$$
$$= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$$
Conclusion :
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1}$.

Méthode $n°2$ **Utilisation de formules de trigonométrie**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(\cos(2x))^2 - 1$$
$$= 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1$$
$$= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$$
Conclusion :
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1}$.

Exercice 5
Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, on note (E_n) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} : z^n = 1$.

1. **Résoudre (E_2), (E_3) et (E_4) puis calculer le produit des solutions de (E_2), le poduit des solutions de (E_3) et le produit des solutions de (E_4) : émettre une conjecture.**

• (E_2): $z^2 = 1$
$z^2 = 1 \Leftrightarrow z^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \; ou \; z = -1$
Produit des solutions : $1 \times (-1) = -1 = (-\mathbf{1})^{\mathbf{2+1}}$

• (E_3) : $z^3 = 1$
Les solutions sont les racines cubiques de l'unité : $e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k \in \{0; 1; 2\}$.
$-$ pour $k = 0$: $z_0 = e^{i0\frac{2\pi}{3}} = e^{i0} = 1$
$-$ pour $k = 1$: $z_1 = e^{i1\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-$ pour $k=2$: $z_2=e^{i2\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Produit des solutions :

$$1\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=+\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1=(-\mathbf{1})^{3+1}$$

Conjecture : **« pour tout $\boldsymbol{n}\geqslant 2$, le produit des solutions de $(\boldsymbol{E_n})$ est $(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$ ».**

2. Déterminer le produit des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\boldsymbol{E_n})$.

Les solutions de (E_n) sont els racines n-ièmes de l'unité, ce sont les n nombres :

$$1,\ e^{i1\frac{2\pi}{n}},e^{i2\frac{2\pi}{n}},\dots,e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}$$

Leur produit est égal à :

$$P_n=1\times e^{i\frac{2\pi}{n}}\times\ e^{i2\frac{2\pi}{n}}\times\dots\times\ e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}=e^{i\left(\frac{2\pi}{n}+2\frac{2\pi}{n}+\cdots+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{n}(1+2+\cdots+(n-1))}$$

Or, la formule de la somme des premiers entiers consécutifs donne :

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{[1+(n-1)]\times(n-1-1+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

donc :

$$P_n=e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\frac{n(n-1)}{2}}=e^{i(n-1)\pi}=\cos\big((n-1)\pi\big)+i\sin\big((n-1)\pi\big)=(-1)^{n+1}+i\times 0$$
$$=(-1)^{n+1}$$

<u>Conclusion</u>

Pour $\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{n}\geqslant 2$, le produit des solutions de $(\boldsymbol{E_n})$ est égal à $(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$.

<u>Exercice 6</u> Un classique difficile

1. Soit $\boldsymbol{z}$ un complexe de module $\mathbf{1}$, montrer que : $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}=\bar{\boldsymbol{z}}$.

Soit z un complexe de module 1, on a : $z\bar{z}=|z|^2$ et $|z|=1$, donc : $z\bar{z}=1^2=1$.

$z\bar{z}=1$donc : $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

<u>Conclusion</u> : **pour tout complexe $\boldsymbol{z}$ de module $\mathbf{1}$, $\bar{\boldsymbol{z}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z}}$.**

2. Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ des complexes de module $\mathbf{1}$, démontrer que :

$$|\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$$

Soient a, b et c des complexes de module 1.

Remarquons d'abord que : $|abc|=|a|\times|b|\times|c|=1\times 1\times 1=1$.

On a :

$$|ab+bc+ca|=\frac{|ab+bc+ca|}{1}=\frac{|ab+ac+bc|}{|abc|}=\left|\frac{ab+bc+ca}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{ab}{abc}+\frac{bc}{abc}+\frac{ca}{abc}\right|=\left|\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right|=|\bar{c}+\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=|\overline{a+b+c}\,|$$
$$=|a+b+c|$$

<u>Résumons</u> :

Pour tous complexes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ de module $\mathbf{1}$, on a : $|\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$.